

УДК 539.374.1

Ленок А. А.  
Ечин С. М.

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ТОЧКИ ПРИ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ В УСЛОВИЯХ ОБЪЕМНОГО НАГРУЖЕНИЯ

При решении практических и ряда теоретических задач возникает необходимость в определении интегральных характеристик напряженного состояния точки. К ним относятся интенсивности касательных и нормальных напряжений  $T_i, \sigma_i$ . При известных значениях компонентов тензора напряжений интенсивности определяются выражениями:

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)},$$

$$T_i = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}. \quad (1)$$

В дальнейшем выражения (1) могут быть использованы для определения механических характеристик конкретной марки стали в условиях горячей или холодной обработки в каждой точке очага деформации.

Решение пространственной задачи в аналитическом виде вызывает большие математические трудности. Поэтому всегда возникают вопросы, связанные с упрощениями в постановке и ее решении [1]. Замкнутая задача теории пластичности, связанная с определением полей напряжений и деформаций, их соответствия между собой, удовлетворением граничных условий, значительно усложняет процесс нахождения результата. Это приводит к непреодолимым трудностям в решении. Однако можно остановиться на вариантах, когда замкнутая постановка задачи не усложняет, а упрощает задачу. Система дифференциальных уравнений кинематической части задачи может быть упрощена, если воспользоваться комбинацией плоских функций, а затем через уравнения связи выйти на статическую часть при определении напряженного состояния точки. При такой схеме решения можно рассмотреть вариант, удовлетворяющий всю систему уравнений теории пластичности в замкнутом виде. Таким образом, статическая часть задачи обоснована и подкреплена кинематической. Кроме этого, при решении практических задач не всегда удается найти надежный результат для аналитического определения напряжений и деформаций в зонах перехода из одной части очага деформации в смежную.

Цель работы – определение интегральных характеристик напряженного состояния точки при пластической деформации.

На рис. 1 показаны компоненты тензора напряжений и контактная поверхность очага деформации в плане с учетом участков перехода из одной зоны пластического течения в другую.

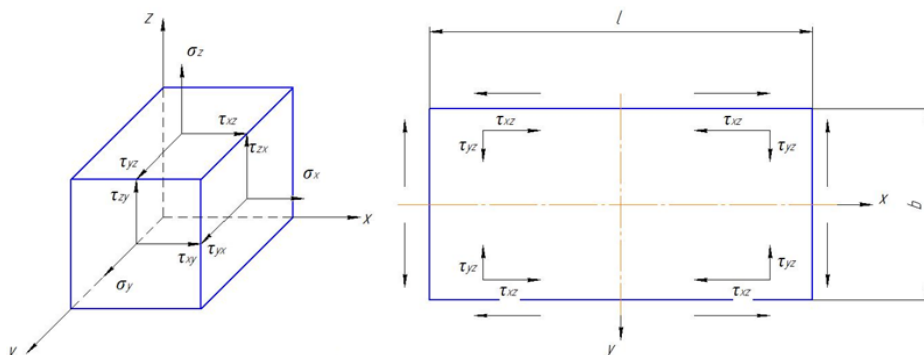


Рис. 1. Компоненты тензоров напряжений и схема действия касательных напряжений на контакте

На участках перехода меняются по величине и направлению касательные напряжения  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$ . На линиях раздела течения металла, оси  $X, Y, Z$ , касательные напряжения  $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$  равны нулю [2]. Это позволяет допустить, что вдоль этих осей имеет место плоскодеформированное состояние.

С учетом последних замечаний рассматривается следующая постановка замкнутой объемной задачи теории пластичности, включающая уравнения [3–7]

1. Уравнения равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

2. Обобщенные уравнения равновесия:

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\sigma_x - \sigma_y), \quad \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (\sigma_y - \sigma_z), \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} (\sigma_z - \sigma_x).$$

3. Уравнения связи:

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} = \frac{\xi_x - \xi_y}{\gamma_{xy}} = F_1, \quad \frac{\sigma_y - \sigma_z}{2\tau_{yz}} = \frac{\xi_y - \xi_z}{\gamma_{yz}} = F_2, \quad \frac{\sigma_z - \sigma_x}{2\tau_{zx}} = \frac{\xi_z - \xi_x}{\gamma_{zx}} = F_3 \quad (3)$$

4. Уравнения совместности скоростей деформаций:

$$\frac{\partial^2 \xi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \gamma_{xy}, \quad \frac{\partial^2 \xi_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \xi_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} \gamma_{yz}, \quad \frac{\partial^2 \xi_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \gamma_{zx}, \quad (4a)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \cdot \frac{\partial^2 \xi_z}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) = 2 \cdot \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial y \partial z},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) = 2 \cdot \frac{\partial^2 \xi_y}{\partial z \partial x}. \quad (4b)$$

5. Граничные условия:

$$\tau_{n1} = k_1 \cdot \sin(A_1 \Phi_1 - 2\alpha_1), \quad \tau_{n2} = k_2 \cdot \sin(A_2 \Phi_2 - 2\alpha_2), \quad (5)$$

$$\gamma_{n1} = 2 \cdot \beta_1 \cdot \sin(B_1 \Phi_1 - 2\alpha_1), \quad \gamma_{n2} = 2 \cdot \beta_2 \cdot \sin(B_2 \Phi_2 - 2\alpha_2).$$

В результате постановки имеем 19 неизвестных ( $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \xi_x, \xi_y, \xi_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, k_1, k_2, k_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, T_i$ ) и 19 уравнений, включая четыре уравнения для граничных условий (1)–(5), где  $k_1, k_2, k_3$  – сопротивление пластическому сдвигу в плоскостях  $XY, YZ, ZX$ ;  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  – интенсивности сдвиговой скорости деформации в тех же плоскостях. Задача статически определяемая.

Использование плоских функций или сочетаний плоских функций в решении определяется стремлением упростить пространственную задачу и в полной мере удовлетворить систему уравнений теории пластичности (1)–(5). Обобщенные уравнения равновесия (2), при известных разностях нормальных напряжений, дают математическую возможность охарактеризовать участки перехода между зонами пластического течения. Анализ показывает, что существуют варианты, при которых их применение оправдывается при решении пространственных задач теории пластичности.

В работах [4–7] предложено аналитическое решение плоской задачи теории пластичности с использованием гармонических функций. В приведенных публикациях показано, что участки перехода смежных зон хорошо описываются обобщенными уравнениями равно-

веса (2). Эти уравнения известны в литературе [8–11] и позволяют получить реальные поля касательных напряжений в зонах, где напряжения меняют свой знак.

После преобразований из уравнений равновесия можно получить систему, связывающую касательные напряжения с разностью нормальных [4], имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial z \partial y} &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\sigma_x - \sigma_y), \\ \frac{\partial^2 \tau_{zy}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \tau_{zy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \tau_{zx}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \tau_{yx}}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (\sigma_y - \sigma_z), \\ \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \tau_{zx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{yx}}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial z \partial y} &= \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} (\sigma_z - \sigma_x). \end{aligned} \quad (6)$$

Выражения (6) можно использовать, если существует возможность связать нормальные и касательные напряжения. Для упрощения (6) воспользуемся ограничениями, которые определяются кинематическими условиями задачи. В этом случае смешанные производные от касательных напряжений по координатам принимаются равными нулю:

$$\frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2 \tau_{zx}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y \partial x} = 0,$$

отсюда

$$\begin{aligned} \tau_{yz} &= f(x, y) + f(y, z), \quad \tau_{xz} = f(x, y) + f(z, x), \\ \tau_{zx} &= f(z, y) + f(z, x), \quad \tau_{yx} = f(z, y) + f(x, y), \\ \tau_{xy} &= f(z, x) + f(x, y), \quad \tau_{zy} = f(x, z) + f(y, z). \end{aligned}$$

Для удовлетворения граничных условий в напряжениях и принятия возможных упрощений, имеем:

$$\tau_{xy} = f(x, y), \quad \tau_{yz} = f(y, z), \quad \tau_{zx} = f(z, x). \quad (7)$$

Имеем систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial x \partial y} (\sigma_x - \sigma_y), \quad \frac{\partial^2 \tau_{zy}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \tau_{zy}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (\sigma_y - \sigma_z), \\ \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \tau_{zx}}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} (\sigma_z - \sigma_x). \end{aligned} \quad (8)$$

Система (8) представлена, как определяющая в системе уравнений теории пластичности. Связь нормальных и касательных напряжений можно определить, используя уравнения связи (3):

$$\sigma_x - \sigma_y = 2\tau_{xy} \cdot F_1, \quad \sigma_y - \sigma_z = 2\tau_{yz} \cdot F_2, \quad \sigma_z - \sigma_x = 2\tau_{zx} \cdot F_2. \quad (9)$$

При постановке задачи (1)–(5), имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial x \partial y} 2 \cdot \tau_{xy} F_1, \quad \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} 2 \cdot \tau_{yz} F_2, \\ \frac{\partial^2 \tau_{zx}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \tau_{zx}}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} 2 \cdot \tau_{zx} F_3. \end{aligned} \quad (10)$$

Такие построения упрощают решение, т. к. в уравнении используется одна разрешающая функция  $\tau$ . Рассматривая в (10) произведения с использованием тригонометрических функций [4–7], можно принять:

$$\begin{aligned} \tau_{xy} \cdot F_1 &= k_1 \cdot \cos(A_1 \Phi_1), \quad \tau_{yz} \cdot F_2 = k_2 \cdot \cos(A_2 \Phi_2), \\ \tau_{zx} \cdot F_3 &= k_3 \cdot \cos(A_3 \Phi_3), \end{aligned} \quad (11)$$

при этом

$$F_1 = \operatorname{ctg} A_1 \Phi_1, \quad F_2 = \operatorname{ctg} A_2 \Phi_2, \quad F_3 = \operatorname{ctg} A_3 \Phi_3.$$

Однако реальная связь нормальных и касательных напряжений для пространственной задачи не соответствует соотношениям (9)–(11). Эта связь сложнее, что видно при элементарном анализе решений уравнений равновесия. Возникает вопрос, при каких условиях возможно использование дифференциальных уравнений (2) или (10) в решении пространственной задачи.

Особенностью данного решения является использование сочетания плоских функций для компонентов тензора напряжений, что определяется требованием решения замкнутой задачи теории пластичности. Это оправдывается при условии, когда решение удовлетворяет всю систему уравнений теории пластичности в виде (1)–(5), качественно и количественно верно характеризует участки перехода пластических зон в различных процессах обработки металлов давлением.

В соответствии с работами [4–7, 12] и выражениями (7)–(11), используются тригонометрические и фундаментальные подстановки вида:

$$\tau_{xy} = k_1 \cdot \sin(A_1 \Phi_1), \quad \tau_{yz} = k_2 \cdot \sin(A_2 \Phi_2), \quad \tau_{zx} = k_3 \cdot \sin(A_3 \Phi_3),$$

$$k_1 = C_{\sigma 1} \cdot \exp(\theta'_1), \quad k_2 = C_{\sigma 2} \cdot \exp(\theta'_2), \quad k_3 = C_{\sigma 3} \cdot \exp(\theta'_3), \quad (12)$$

где  $A_i \Phi_i$  – аргументы тригонометрических функций, зависящие от координат  $X, Y, Z$ ,

определяемые решением задачи;  $\theta'_i$  – показатели экспонент, зависящие от координат  $X, Y, Z$ , определяемые решением задачи.

При подстановке (12) в (10), получим систему уравнений:

первое уравнение:

$$\begin{aligned} & \left[ \theta'_{1xx} + (\theta'_{1x} + A_1 \Phi_{1y})^2 - \theta'_{1yy} - (\theta'_{1y} - A_1 \Phi_{1x})^2 \right] \cdot \sin A_1 \Phi_1 + \\ & + \left[ 2 \cdot (\theta'_{1x} + A_1 \Phi_{1y}) \cdot (A_1 \Phi_{1x} - \theta'_{1y}) + A_1 \Phi_{1xx} - A_1 \Phi_{1yy} \right] \cdot \cos A_1 \Phi_1 = \\ & = -2 \cdot A_1 \Phi_{1xy} \cdot \sin A_1 \Phi_1 + 2 \cdot \theta'_{1xy} \cdot \cos A_1 \Phi_1, \end{aligned}$$

второе уравнение:

$$\begin{aligned} & \left[ \theta'_{2yy} + (\theta'_{2y} + A_2 \Phi_{2z})^2 - \theta'_{2zz} - (\theta'_{2z} - A_2 \Phi_{2y})^2 \right] \cdot \sin A_2 \Phi_2 + \\ & + \left[ 2 \cdot (\theta'_{2y} + A_2 \Phi_{2z}) \cdot (A_2 \Phi_{2y} - \theta'_{2z}) + A_2 \Phi_{2yy} - A_2 \Phi_{2zz} \right] \cdot \cos A_2 \Phi_2 = (13) \\ & = -2 \cdot A_2 \Phi_{2yz} \cdot \sin A_2 \Phi_2 + 2 \cdot \theta'_{2yz} \cdot \cos A_2 \Phi_2, \end{aligned}$$

третье уравнение:

$$\begin{aligned} & \left[ \theta'_{3zz} + (\theta'_{3z} + A_3 \Phi_{3x})^2 - \theta'_{3xx} - (\theta'_{3x} - A_3 \Phi_{3z})^2 \right] \cdot \sin A_3 \Phi_3 + \\ & + \left[ 2 \cdot (\theta'_{3z} + A_3 \Phi_{3x}) \cdot (A_3 \Phi_{3z} - \theta'_{3x}) + A_3 \Phi_{3zz} - A_3 \Phi_{3xx} \right] \cdot \cos A_3 \Phi_3 = \\ & = -2 \cdot A_3 \Phi_{3zx} \cdot \sin A_3 \Phi_3 + 2 \cdot \theta'_{3zx} \cdot \cos A_3 \Phi_3 \end{aligned}$$

В уравнениях (13) появляются операторы перед тригонометрическими функциями. В каждом операторе появляются одинаковые скобки. Решение имеет продолжение, когда скобки

$$\begin{aligned} & (\theta'_{1x} + A_1 \Phi_{1y}), (\theta'_{1y} - A_1 \Phi_{1x}), (\theta'_{2y} + A_2 \Phi_{2z}), \\ & (\theta'_{2z} - A_2 \Phi_{2y}), (\theta'_{3z} + A_3 \Phi_{3x}), (\theta'_{3x} - A_3 \Phi_{3z}) \end{aligned}$$

равны нулю, уравнения превращаются в тождества. Покажем это на примере первого уравнения системы (13), имеем:

$$\theta'_{1x} = -A_1 \Phi_{1y}, \quad \theta'_{1y} = A_1 \Phi_{1x}. \quad (14)$$

Вторые производные

$$\theta'_{1xx} = -A_1 \Phi_{1yx}, \quad \theta'_{1yy} = A_1 \Phi_{1xy}, \quad \theta'_{1xy} = -A_1 \Phi_{1yy} = A_1 \Phi_{1xx}. \quad (15)$$

Из соотношений (14) и (15) приходим к уравнениям Лапласа, которым удовлетворяют функции  $\theta'_1$  и  $A_1 \Phi_1$

$$\theta'_{1xx} + \theta'_{1yy} = 0, A_1\Phi_{1xx} + A_1\Phi_{1yy} = 0. \quad (16)$$

Обозначен класс вводимых в рассмотрение функций – они гармонические. При такой постановке они считаются известными. С другой стороны, соотношения (14) и (15) превращают (13) в тождество. Таким образом, функции  $\tau$  имеют решения в виде:

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= C_{\sigma 1} \cdot \exp \theta'_1 \cdot \sin A_1 \Phi_1, \quad \tau_{yz} = C_{\sigma 2} \cdot \exp \theta'_2 \cdot \sin A_2 \Phi_2, \\ \tau_{zx} &= C_{\sigma 3} \cdot \exp \theta'_3 \cdot \sin A_3 \Phi_3, \end{aligned} \quad (17)$$

при условии

$$\begin{aligned} \theta'_{1x} &= -A_1 \Phi_{1y}, \quad \theta'_{1y} = A_1 \Phi_{1x}; \quad \theta'_{2y} = -A_2 \Phi_{2z}, \quad \theta'_{2z} = A_2 \Phi_{2y}; \\ \theta'_{3z} &= -A_3 \Phi_{3x}, \quad \theta'_{3x} = A_3 \Phi_{3z}; \\ \theta'_{1xx} + \theta'_{1yy} &= 0, \quad A_1 \Phi_{1xx} + A_1 \Phi_{1yy} = 0; \\ \theta'_{2yy} + \theta'_{2zz} &= 0, \quad A_2 \Phi_{2yy} + A_2 \Phi_{2zz} = 0; \\ \theta'_{3zz} + \theta'_{3xx} &= 0, \quad A_3 \Phi_{3zz} + A_2 \Phi_{3xx} = 0. \end{aligned}$$

Нормальные напряжения  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  определяются по известным касательным напряжениям (17) из уравнений равновесия. С учетом дивергентной составляющей имеем:

$$\begin{aligned} \sigma'_x &= k_1 \cdot \cos(A_1 \Phi_1) - k_3 \cdot \cos(A_3 \Phi_3) + \sigma_0 + f(y, z) + C, \\ \sigma'_y &= -k_1 \cdot \cos(A_1 \Phi_1) + k_2 \cdot \cos(A_2 \Phi_2) + \sigma_0 + f(x, z) + C, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\sigma'_z = k_3 \cdot \cos(A_3 \Phi_3) - k_2 \cdot \cos(A_2 \Phi_2) + \sigma_0 + f(x, y) + C.$$

Используя (18) вернемся к разности нормальных напряжений в уравнениях (8)

$$\begin{aligned} \sigma'_x - \sigma'_y &= 2 \cdot k_1 \cdot \cos(A_1 \Phi_1) - k_2 \cdot \cos(A_2 \Phi_2) - k_3 \cdot \cos(A_3 \Phi_3), \\ \sigma'_y - \sigma'_z &= 2 \cdot k_2 \cdot \cos(A_2 \Phi_2) - k_3 \cdot \cos(A_3 \Phi_3) - k_1 \cdot \cos(A_1 \Phi_1), \\ \sigma'_z - \sigma'_x &= 2 \cdot k_3 \cdot \cos(A_3 \Phi_3) - k_1 \cdot \cos(A_1 \Phi_1) - k_2 \cdot \cos(A_2 \Phi_2). \end{aligned} \quad (19)$$

Представленные разности представляют собой комбинации плоских функций, более сложных, чем (9). Можно показать, что смешанные производные от разностей в (9) и в (19) дают один и тот же результат и поэтому приемлемым становится использование плоских функций для напряжений. Покажем это:

плоская задача

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x \partial y} 2 \cdot \tau_{xy} F_1 &= 2 \cdot \frac{\partial}{\partial x \partial y} k_1 \cos A_1 \Phi_1 = 2(k_{1xy} - k_1 \cdot A_1 \Phi_{1x} \cdot A_1 \Phi_{1y}) \cdot \cos A_1 \Phi_1 - \\ &- 2(k_1 A_1 \Phi_{1xy} + k_{1x} A_1 \Phi_{1y} + k_{1y} A_1 \Phi_{1x}) \cdot \sin A_1 \Phi_1, \end{aligned}$$

пространственная задача

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial}{\partial x \partial y} (2 \cdot k_1 \cdot \cos(A_1 \Phi_1) - k_2 \cdot \cos(A_2 \Phi_2) - k_3 \cdot \cos(A_3 \Phi_3)) = \\ &= 2(k_{1xy} - k_1 \cdot A_1 \Phi_{1x} \cdot A_1 \Phi_{1y}) \cdot \cos A_1 \Phi_1 - 2(k_1 A_1 \Phi_{1xy} + k_{1x} A_1 \Phi_{1y} + \\ &\quad + k_{1y} A_1 \Phi_{1x}) \sin A_1 \Phi_1 \end{aligned}$$

Показанная особенность является принципиальным фрагментом в представленном решении. С учетом знака показателя экспоненты возможны следующие варианты решений. Компоненты тензора напряжений пространственной задачи:

$$\begin{aligned} \sigma'_x &= \pm C_{\sigma 1} \cdot \exp \theta'_1 \cdot \cos(A_1 \Phi_1) \mp C_{\sigma 3} \cdot \exp \theta'_3 \cdot \cos(A_3 \Phi_3) + \sigma_0 + C, \\ \sigma'_y &= \mp C_{\sigma 1} \cdot \exp \theta'_1 \cdot \cos(A_1 \Phi_1) \pm C_{\sigma 2} \cdot \exp \theta'_2 \cdot \cos(A_2 \Phi_2) + \sigma_0 + C, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_z &= \pm C_{\sigma 3} \cdot \exp \theta_3' \cdot \cos(A_3 \Phi_3) \mp C_{\sigma 2} \cdot \exp \theta_2' \cdot \cos(A_2 \Phi_2) + \sigma_0 + C, \\ \tau_{xy} &= C_{\sigma 1} \cdot \exp \theta_1' \cdot \sin A_1 \Phi_1, \tau_{yz} = C_{\sigma 2} \cdot \exp \theta_2' \cdot \sin A_2 \Phi_2, \\ \tau_{zx} &= C_{\sigma 3} \cdot \exp \theta_3' \cdot \sin A_3 \Phi_3,\end{aligned}\quad (20)$$

при условии

$$\begin{aligned}\theta_{1x}' &= \mp A_1 \Phi_{1y}, \theta_{1y}' = \pm A_1 \Phi_{1x}; \theta_{2y}' = \mp A_2 \Phi_{2z}, \theta_{2z}' = \pm A_2 \Phi_{2y}; \\ \theta_{3z}' &= \mp A_3 \Phi_{3x}, \theta_{3x}' = \pm A_3 \Phi_{3z}; \\ \theta_{1xx}' + \theta_{1yy}' &= 0, A_1 \Phi_{1xx} + A_1 \Phi_{1yy} = 0; \\ \theta_{2yy}' + \theta_{2zz}' &= 0, A_2 \Phi_{2yy} + A_2 \Phi_{2zz} = 0; \\ \theta_{3zz}' + \theta_{3xx}' &= 0, A_3 \Phi_{3zz} + A_2 \Phi_{3xx} = 0.\end{aligned}$$

Определение составляющих тензора скоростей деформаций. Кинематическая часть задачи является своеобразным тестом для стационарной, т.к. через уравнения связи формируются ограничения на функции напряжений. Для удовлетворения второй половины системы дифференциальных уравнений (4б), простейшим является вариант, в котором смешанные производные от сдвиговых скоростей деформаций в левых частях равны нулю. Приемлемым является

$$\dot{\gamma}_{xy} = f(x, y); \dot{\gamma}_{yz} = f(y, z); \dot{\gamma}_{zx} = f(z, x),$$

линейные скорости деформаций, как и нормальные напряжения, представляют собой сочетание плоских функций. Первое уравнение связи (3) запишется:

$$\frac{2 \cdot k_1 \cdot \cos(A_1 \Phi_1) - k_2 \cdot \cos(A_2 \Phi_2) - k_3 \cdot \cos(A_3 \Phi_3)}{2 \cdot k_1 \cdot \sin(A_1 \Phi_1)} = \frac{\xi_x - \xi_y}{\dot{\gamma}_{xy}}.$$

Из последнего выражения следует, что скорости деформаций в правой части, при определенных соотношениях вводимых в рассмотрение функций, равны:

$$\xi_x = \beta_1 \cdot \cos(B_1 \Phi_1) - \beta_3 \cdot \cos(B_3 \Phi_3), \xi_y = -\beta_1 \cdot \cos(B_1 \Phi_1) + \beta_2 \cdot \cos(B_2 \Phi_2),$$

$$\dot{\gamma}_{xy} = 2 \cdot \beta_1 \cdot \sin(B_1 \Phi_1).$$

При этом

$$\frac{\xi_x - \xi_y}{\dot{\gamma}_{xy}} = \frac{2 \cdot \beta_1 \cdot \cos(B_1 \Phi_1) - \beta_2 \cdot \cos(B_2 \Phi_2) - \beta_3 \cdot \cos(B_3 \Phi_3)}{2 \cdot \beta_1 \cdot \sin(B_1 \Phi_1)}.$$

Качественное построение решения для скоростей деформаций в общем имеют вид

$$\begin{aligned}\xi_x &= \pm \beta_1 \cdot \cos(B_1 \Phi_1) \mp \beta_3 \cdot \cos(B_3 \Phi_3), \\ \xi_y &= \pm \beta_2 \cdot \cos(B_2 \Phi_2) \mp \beta_1 \cdot \cos(B_1 \Phi_1), \\ \xi_z &= \pm \beta_3 \cdot \cos(B_3 \Phi_3) \mp \beta_2 \cdot \cos(B_2 \Phi_2).\end{aligned}\quad (21)$$

$$\dot{\gamma}_{xy} = 2 \cdot \beta_1 \cdot \sin B_1 \Phi_1, \dot{\gamma}_{yz} = 2 \cdot \beta_2 \cdot \sin B_2 \Phi_2, \dot{\gamma}_{zx} = 2 \cdot \beta_3 \cdot \sin B_3 \Phi_3.$$

Выполняется условие постоянства объема

$$\xi_x + \xi_y + \xi_z = 0.$$

В уравнениях связи аргументы тригонометрических функций имеют одинаковые функции  $\Phi$ . При этом функции с индексом 1 определяются координатами XY, 2 - YZ, 3 - ZX. В формулах (21) неизвестными являются функции  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ . Подставим скорости дефор-

маций (21) в первые три дифференциальные уравнения неразрывности скоростей деформаций (4а), тогда после приведения и упрощений уравнения неразрывности сводятся к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \beta_1 \cdot \cos(A_1 \Phi_1)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \beta_1 \cos(A_1 \Phi_1)}{\partial x^2} &= 2 \cdot \frac{\partial^2 \beta_1 \cdot \sin(A_1 \Phi_1)}{\partial y \partial x}, \\ \frac{\partial^2 \beta_2 \cdot \cos(A_2 \Phi_2)}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \beta_2 \cdot \cos(A_2 \Phi_2)}{\partial y^2} &= 2 \cdot \frac{\partial^2 \beta_2 \cdot \sin(A_2 \Phi_2)}{\partial z \partial y}, \\ \frac{\partial^2 \beta_3 \cdot \cos(A_3 \Phi_3)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \beta_3 \cdot \cos(A_3 \Phi_3)}{\partial z^2} &= 2 \cdot \frac{\partial^2 \beta_3 \cdot \sin(A_3 \Phi_3)}{\partial x \partial z}. \end{aligned} \quad (22)$$

Несмотря на сложные сочетания функций в уравнениях системы (22) присутствуют одинаковые неизвестные  $\beta$ , входят в систему уравнений в 1-ой степени. Это позволяет использовать фундаментальную подстановку вида [12]

$$\beta_1 = C_{\xi_1} \cdot \exp \theta_1'', \quad \beta_2 = C_{\xi_2} \cdot \exp \theta_2'', \quad \beta_3 = C_{\xi_3} \cdot \exp \theta_3''. \quad (23)$$

Подставляя (23) в (22) получим систему

$$\begin{aligned} &\text{первое уравнение} \\ &\left[ -\theta_{1xx}'' - (\theta_{1x}'' + B_1 \Phi_{1y})^2 + \theta_{1yy}'' + (\theta_{1y}'' - B_1 \Phi_{1x})^2 \right] \cdot \cos B_1 \Phi_1 + \\ &+ \left[ 2 \cdot (B_1 \Phi_{1x} - \theta_{1y}'') \cdot (\theta_{1x}'' + B_1 \Phi_{1y}) + (B_1 \Phi_{1xx} - B_1 \Phi_{1yy}) \right] \cdot \sin B_1 \Phi_1 = \\ &= 2 \cdot B_1 \Phi_{1xy} \cdot \cos B_1 \Phi_1 + 2 \cdot \theta_{1xy}'' \cdot \sin B_1 \Phi_1, \\ &\text{второе уравнение} \\ &\left[ -\theta_{2yy}'' - (\theta_{2y}'' + B_2 \Phi_{2z})^2 + \theta_{2zz}'' + (\theta_{2z}'' - B_2 \Phi_{2y})^2 \right] \cdot \cos B_2 \Phi_2 + \\ &+ \left[ 2 \cdot (B_2 \Phi_{2y} - \theta_{2z}'') \cdot (\theta_{2y}'' + B_2 \Phi_{2z}) + (B_2 \Phi_{2yy} - B_2 \Phi_{2zz}) \right] \cdot \sin B_2 \Phi_2 = \\ &= 2 \cdot B_2 \Phi_{2yz} \cdot \cos B_2 \Phi_2 + 2 \cdot \theta_{2yz}'' \cdot \sin B_2 \Phi_2, \\ &\text{третье уравнение} \\ &\left[ -\theta_{3zz}'' - (\theta_{3z}'' + B_3 \Phi_{3x})^2 + \theta_{3xx}'' + (\theta_{3x}'' - B_3 \Phi_{3z})^2 \right] \cdot \cos B_3 \Phi_3 + \\ &+ \left[ 2 \cdot (B_3 \Phi_{3z} - \theta_{3x}'') \cdot (\theta_{3z}'' + B_3 \Phi_{3x}) + (B_3 \Phi_{3zz} - B_3 \Phi_{3xx}) \right] \cdot \sin B_3 \Phi_3 = \\ &= 2 \cdot B_3 \Phi_{3zx} \cdot \cos B_3 \Phi_3 + 2 \cdot \theta_{3zx}'' \cdot \sin B_3 \Phi_3. \end{aligned} \quad (24)$$

Как и в случае (13) система (24) может быть решена, если существует возможность избавиться от нелинейности. Принимая скобки в операторах равными нулю. Тогда

$$\begin{aligned} \theta_{1x}'' &= -B_1 \Phi_{1y}, \quad \theta_{1y}'' = B_1 \Phi_{1x}; \quad \theta_{2y}'' = -B_2 \Phi_{2z}, \quad \theta_{2z}'' = B_2 \Phi_{2y}; \\ \theta_{3z}'' &= -B_3 \Phi_{3x}, \quad \theta_{3x}'' = B_3 \Phi_{3z}. \end{aligned} \quad (25)$$

Вторые производные

$$\begin{aligned} \theta_{1x}'' &= -B_1 \Phi_{1y}, \quad \theta_{1y}'' = B_1 \Phi_{1x}; \quad \theta_{2y}'' = -B_2 \Phi_{2z}, \quad \theta_{2z}'' = B_2 \Phi_{2y}; \\ \theta_{3z}'' &= -B_3 \Phi_{3x}, \quad \theta_{3x}'' = B_3 \Phi_{3z}; \\ \theta_{1xx}'' + \theta_{1yy}'' &= 0, \quad B_1 \Phi_{1xx} + B_1 \Phi_{1yy} = 0; \\ \theta_{2yy}'' + \theta_{2zz}'' &= 0, \quad B_2 \Phi_{2yy} + B_2 \Phi_{2zz} = 0; \\ \theta_{3zz}'' + \theta_{3xx}'' &= 0, \quad B_3 \Phi_{3zz} + B_3 \Phi_{3xx} = 0. \end{aligned}$$

Вводимые в рассмотрение функции  $\theta_i''$  и  $V_i\Phi_i$  являются гармоническими, как и функции для компонентов тензора напряжений.

Выражения для определения компонентов тензора скоростей деформации для пространственной задачи, с учетом (21)–(25), имеют вид:

$$\begin{aligned} \xi_x &= \pm\beta_1 \cdot \cos(B_1\Phi_1) \mp \beta_3 \cdot \cos(B_3\Phi_3), \\ \xi_y &= \pm\beta_2 \cdot \cos(B_2\Phi_2) \mp \beta_1 \cdot \cos(B_1\Phi_1), \\ \xi_z &= \pm\beta_3 \cdot \cos(B_3\Phi_3) \mp \beta_2 \cdot \cos(B_2\Phi_2), \end{aligned} \tag{26}$$

$$\dot{\gamma}_{xy} = 2 \cdot C_{\xi 1} \cdot \exp \theta_1'' \cdot \sin B_1\Phi_1, \quad \dot{\gamma}_{yz} = 2 \cdot C_{\xi 2} \cdot \exp \theta_2'' \cdot \sin B_2\Phi_2,$$

$$\dot{\gamma}_{zx} = 2 \cdot C_{\xi 3} \cdot \exp \theta_3'' \cdot \sin B_3\Phi_3,$$

при условии

$$\theta_{1x}'' = \mp B_1\Phi_{1y}, \quad \theta_{1y}'' = \pm B_1\Phi_{1x}; \quad \theta_{2y}'' = \mp B_2\Phi_{2z}, \quad \theta_{2z}'' = \pm B_2\Phi_{2y};$$

$$\theta_{3z}'' = \mp B_3\Phi_{3x}, \quad \theta_{3x}'' = \pm B_3\Phi_{3z};$$

$$\theta_{1xx}'' + \theta_{1yy}'' = 0, \quad B_1\Phi_{1xx} + B_1\Phi_{1yy} = 0;$$

$$\theta_{2yy}'' + \theta_{2zz}'' = 0, \quad B_2\Phi_{2yy} + B_2\Phi_{2zz} = 0;$$

$$\theta_{3zz}'' + \theta_{3xx}'' = 0, \quad B_3\Phi_{3zz} + B_3\Phi_{3xx} = 0.$$

Интегральные характеристики напряженного состояния. Из выше сказанного следует, что замкнутая постановка и решение задачи теории пластичности не усложняет ее, а при определенных подходах – упрощает и позволяет найти решение пространственной задачи в аналитическом виде. Представляет интерес найти обобщенные показатели напряженного состояния точки с использованием решения (22). Рассмотрим несколько вариантов, представляемых соотношениями (22). Пусть

$$\sigma'_x = k_1 \cdot \cos(A_1\Phi_1) - k_3 \cdot \cos(A_3\Phi_3) + \sigma_0 + f(y, z) + C,$$

$$\sigma'_y = -k_1 \cdot \cos(A_1\Phi_1) + k_2 \cdot \cos(A_2\Phi_2) + \sigma_0 + f(x, z) + C,$$

$$\sigma'_z = k_3 \cdot \cos(A_3\Phi_3) - k_2 \cdot \cos(A_2\Phi_2) + \sigma_0 + f(x, y) + C.$$

Разности нормальных напряжений:

$$\sigma'_x - \sigma'_y = 2 \cdot k_1 \cdot \cos(A_1\Phi_1) - k_2 \cdot \cos(A_2\Phi_2) - k_3 \cdot \cos(A_3\Phi_3),$$

$$\sigma'_y - \sigma'_z = 2 \cdot k_2 \cdot \cos(A_2\Phi_2) - k_3 \cdot \cos(A_3\Phi_3) - k_1 \cdot \cos(A_1\Phi_1),$$

$$\sigma'_z - \sigma'_x = 2 \cdot k_3 \cdot \cos(A_3\Phi_3) - k_1 \cdot \cos(A_1\Phi_1) - k_2 \cdot \cos(A_2\Phi_2).$$

Подставляя в (1), имеем:

$$\sigma'_i = \sqrt{3} \cdot \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 - k_1 \cos A_1\Phi_1 \cdot k_3 \cdot \cos A_3\Phi_3 - k_1 \cos A_1\Phi_1 \cdot k_2 \cdot \cos A_2\Phi_2 - k_3 \cos A_3\Phi_3 \cdot k_2 \cdot \cos A_2\Phi_2}. \tag{27}$$

Следует отметить, что под радикалом присутствует сумма квадратов плоских функций для значений  $k$ . Появление разности тригонометрических функций вносит существенные коррективы в результат и значительно влияет на интегральную характеристику тригонометрической составляющей. При  $k_2 = 0$  выражение (27) упрощается и принимает вид:

$$\sigma'_i = \sqrt{3} \cdot \sqrt{k_1^2 + k_3^2 - k_1 \cos A_1\Phi_1 \cdot k_3 \cdot \cos A_3\Phi_3}.$$

Если  $k_2 = k_3 = 0$ , имеем плоскую задачу теории пластичности, тогда



$$\sigma'_i = \sqrt{3} \cdot \sqrt{k_1^2} = \sqrt{3} \cdot k_1 = \sigma_T, \text{ т. е. } k_1 = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}}.$$

Вариант, когда все напряжения могут быть сдвинуты в отрицательную зону, за счет среднего напряжения  $\sigma_0$ , имеют вид:

$$\begin{aligned}\sigma''_x &= -k_1 \cdot \cos(A_1\Phi_1) + k_3 \cdot \cos(A_3\Phi_3) + \sigma_0 + C, \\ \sigma''_y &= +k_1 \cdot \cos(A_1\Phi_1) + k_2 \cdot \cos(A_2\Phi_2) + \sigma_0 + C, \\ \sigma''_z &= -k_3 \cdot \cos(A_3\Phi_3) - k_2 \cdot \cos(A_2\Phi_2) + \sigma_0 + C,\end{aligned}$$

Разность нормальных напряжений:

$$\begin{aligned}\sigma''_x - \sigma''_y &= -2 \cdot k_1 \cdot \cos A_1\Phi_1 + k_3 \cdot \cos A_3\Phi_3 - k_2 \cdot \cos A_2\Phi_2, \\ \sigma''_y - \sigma''_z &= 2 \cdot k_2 \cdot \cos A_2\Phi_2 + k_3 \cdot \cos A_3\Phi_3 + k_1 \cdot \cos A_1\Phi_1, \\ \sigma''_z - \sigma''_x &= -2 \cdot k_3 \cdot \cos A_3\Phi_3 + k_1 \cdot \cos A_1\Phi_1 - k_2 \cdot \cos A_2\Phi_2.\end{aligned}$$

Подставляя в интенсивность напряжений, получим:

$$\sigma''_i = \sqrt{3} \cdot \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 - k_1 \cos A_1\Phi_1 \cdot k_3 \cdot \cos A_3\Phi_3 + k_1 \cos A_1\Phi_1 \cdot k_2 \cdot \cos A_2\Phi_2 + k_3 \cos A_3\Phi_3 \cdot k_2 \cdot \cos A_2\Phi_2}. \quad (28)$$

Неизменным остается сумма квадратов значений  $k$ . Сравнивая выражения (27) и (28), видно, что перед тригонометрическими функциями меняются знаки. Это приводит к изменениям в расчетах. В случае (27) следует ожидать интенсивность несколько большую по величине, чем (28). Неизменность суммы квадратов  $k$  при разных комбинациях напряжений свидетельствует о том, что интенсивность напряжений изменяется около данного значения в большую или меньшую сторону, а величина

$$\sigma''_i = \sqrt{3} \cdot \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2} = \sqrt{3} \cdot k,$$

является своеобразным ядром решения. При  $k_1 = 0$  выражение (28) упрощается и принимает вид:

$$\sigma''_i = \sqrt{3} \cdot \sqrt{k_2^2 + k_3^2 + k_2 \cos A_2\Phi_2 \cdot k_3 \cdot \cos A_3\Phi_3}.$$

Если  $k_1 = k_2 = 0$ , имеем плоскую задачу теории пластичности, тогда

$$\sigma''_i = \sqrt{3} \cdot \sqrt{k_3^2} = \sqrt{3} \cdot k_3 = \sigma_T, \text{ т. е. } k_3 = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}}.$$

Из анализа интегральных характеристик напряженного состояния видно, что результат пространственной задачи, при упрощении, может быть сопоставим с известными зависимостями для плоской задачи. Это позволяет рассматривать полученное решение при объемном нагружении, как более общую и более сложную характеристику напряженного состояния точки, удовлетворяющее замкнутую систему уравнений теории пластичности.

## ВЫВОДЫ

1. Интегральные характеристики напряженного состояния определяют механические характеристики пластической среды. Представленное соотношение можно использовать для учета неравномерности механических свойств обработанного материала.
2. Поставлена замкнутая объемная задача теории пластичности (статическая и кинематическая части), позволяющие в определенной степени не усложнять, а упрощать решение.
3. Корректирующим фактором простого решения является кинематическая часть задачи, которую легче удовлетворить комбинациями плоских функций.
4. Полученный результат находится в определенном соответствии с решением плоской задачи и может быть рекомендован для определения компонентов тензора напряжений, тензора деформаций и обобщенных показателей состояния точки.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чигиринский В. В. Пространственная задача теории пластичности / В. В. Чигиринский, С. П. Шейко, С. М. Ечин // *Обработка материалов давлением: сборник научных трудов.* – Краматорск : ДГМА, 2013. – № 2 (35). – С. 3–8.
2. Каптуров Л. Е. Контактные силы в очаге деформации при прокатке полос / Л. Е. Каптуров // *Теоретические проблемы прокатного производства. Материалы Всесоюзной научно-технической конференции.* – Днепропетровск, 1975. – С. 428–432.
3. Чигиринский В. В. О новых подходах решения задач теории пластичности / В. В. Чигиринский // *Обработка материалов давлением: сборник научных трудов.* – Краматорск, 2009. – № 1 (20). – С. 41–49.
4. Производство высокоэффективного металлопроката / В. В. Чигиринский, В. Л. Мазур, Г. В. Бергеман, Г. И. Леготкин, А. Г. Слепынин, Т. Г. Шевченко. – Днепропетровск : «Дніпро-ВАЛ», 2006. – 265 с., с ил.
5. Чигиринский В. В. Новое решение плоской задачи теории пластичности / В. В. Чигиринский // *Научные труды ДонНТУ. Серия: Metallurgija.* – Донецк, 2008. – № 10 (141). – С. 105–115.
6. Чигиринский В. В. Метод решения задач теории пластичности с использованием гармонических функций / В. В. Чигиринский // *Известия вузов. Черная металлургия.* – 2009. – № 5. – С. 11–16.
7. Чигиринский В. В. Некоторые особенности теории пластичности применительно к процессам ОМД / В. В. Чигиринский // *Теория и технология процессов пластической деформации-96. Труды научно-технической конференции.* – М. : МИСиС, 1997. – С. 568–572.
8. Prantil L. Z.A.M.M. – 1923. –S. 401.
9. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел / А. Надаи. – М. : Из-во Иностранной литературы, 1954. – 647 с.
10. Безухов Н. И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести / Н. И. Безухов. – Высшая школа, 1968. – 498 с.
11. Аркулис Г. Э. Теория пластичности / Г. Э. Аркулис, В. Г. Дорогобид. – М. : Металлургия, 1987. – 351 с.
12. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М. : Наука, 1977. – 735 с.

## REFERENCES

1. Chigirinskij V. V. Prostranstvennaja zadacha teorii plastichnosti / V. V. Chigirinskij, S. P. Shejko, S. M. Echin // *Obrabotka materialov davleniem : sbornik nauchnyh trudov.* – Kramatorsk : DGMA, 2013. – № 2 (35). – S. 3–8.
2. Kapurov L. E. Kontaktnye sily v ochage deformatsii pri prokatke polos / L. E. Kapurov // *Teoreticheskie problemy prokatnogo proizvodstva. Materialy Vsesojuznoj nauchno-tehnicheskoi konferencii.* – Dnepropetrovsk, 1975. – S. 428–432.
3. Chigirinskij V. V. O novyh podhodah reshenija zadach teorii plastichnosti / V. V. Chigirinskij // *Obrabotka materialov davleniem : sbornik nauchnyh trudov.* – Kramatorsk, 2009. – № 1 (20). – S. 41–49.
4. Proizvodstvo vysokojeffektivnogo metalloprokata / V. V. Chigirinskij, V. L. Mazur, G. V. Bergeman, G. I. Legotkin, A. G. Slepynin, T. G. Shevchenko. – Dnepropetrovsk : «Dnipro-VAL», 2006. – 265 s., s il.
5. Chigirinskij V. V. Novoe reshenie ploskoj zadachi teorii plastichnosti / V. V. Chigirinskij // *Nauchnye trudy DonNTU. Serija : Metallurgija.* – Doneck, 2008. – № 10 (141). – S. 105–115.
6. Chigirinskij V. V. Metod reshenija zadach teorii plastichnosti s ispol'zovaniem garmonicheskikh funkcij / V. V. Chigirinskij // *Izvestija vuzov. Chernaja metallurgija.* – 2009. – № 5. – S. 11–16.
7. Chigirinskij V. V. Nekotorye osobennosti teorii plastichnosti primenitel'no k processam OMD / V. V. Chigirinskij // *Teorija i tehnologija processov plasticheskoi deformatsii-96. Trudi nauchno-tehnicheskoi konferencii.* – M. : MISiS, 1997. – S. 568–572.
8. Prantil L. Z.A.M.M. – 1923. –S. 401.
9. Nadai A. Plastichnost' i razrushenie tverdyh tel / A. Nadai. – M. : Iz-vo Inostrannoju literatury, 1954. – 647 s.
10. Bezuhov N. I. Osnovy teorii uprugosti, plastichnosti i polzuchesti / N. I. Bezuhov. – Vysshaja shkola, 1968. – 498 s.
11. Arkulis G. Je. Teorija plastichnosti / G. Je. Arkulis, V. G. Dorogobid. – M. : Metallurgija, 1987. – 351 s.
12. Tihonov A. N. Uravnenija matematicheskoi fiziki / A. N. Tihonov, A. A. Samarskij. – M. : Nauka, 1977. – 735 s.

Ленок А. А. – ассистент каф. ОМД, ЗНТУ;

Ечин С. М. – ассистент каф. ОМД, ЗНТУ.

ЗНТУ – Запорожский национальный технический университет, г. Запорожье.

E-mail: anastasion4@rambler.ru, ser.echin92@gmail.com

Статья поступила в редакцию 10.09.2015 г.